polarization. Diffusional broadening is determined by $k^2 D_{\mathrm{T}} \propto n^{-1}$. The latter contribution depends on the scattering angle between the wave vectors of the incident and the detected scattered light. For scattering under 90° where $k$ is of the order of $\lambda^{-1}$ collisional broadening dominates if the pressure is high enough that the mean free path of a molecule is very short compared with the wave length $\lambda$ of the light.

The derivation of Eqs. (3, 4) from the WALDMANN-SNIDER equation, the calculation of the spectral function $S$ from the full Eqs. (3, 4), and a discussion of the approximations involved in Eq. (6) are given in a forthcoming publication [9]. Also in Ref. [9], the relaxation coefficients $\omega_{\mathrm{T}}$ and $\omega_{\mathrm{TF}}$ are expressed in terms of collision brackets obtained from the WALDMANN-SNIDER collision term which contains the binary molecular scattering amplitude operator and its adjoint. This point is of particular interest for $\omega_{\mathrm{T}}$ which is especially sensitive to the nonspherical part of scattering amplitude. Furthermore, it will be discussed under which conditions $\omega_{\mathrm{T}}$ obtained from the light scattering experiment can be compared with data obtained from the Senftleben-Beenakker effect on the viscosity and from nuclear spin relaxation and when $\omega_{\mathrm{TF}}$ can be compared with Senftleben-Beenakker effect measurements of the heat conductivity.

[9] S. HESS, to be published.

Helpful discussions with Prof. Dr. L. WALDMANN, Dr. H. F. P. KNAAP and Dr. F. R. MCCOURT are acknowledged.

---

# Zur Begründung der Lorentz-Gruppe von Süßmann

H. BRENNICH

Sektion Physik der Universität München, Lehrstuhl Bopp

(Z. Naturforsch. **24 a**, 1853—1854 [1969]; eingeg. am 27. September 1969)

SÜSSMANN's *deduction of the Lorentz group is mathematized. It is shown that it depends mainly on the notion of velocity transformation.*

Diese Arbeit stellt im wesentlichen eine Analyse des Artikels von SÜSSMANN [1] dar. Es stellt sich heraus, daß für die Begründung der Lorentz-Gruppe in Süßmanns Form der Begriff der „reinen Geschwindigkeitstransformation" wesentlich ist. Der Aufbau der Arbeit ist synthetisch.

Das physikalische Geschehen spiele sich im $\mathbf{R}^4$, der Raum-Zeit, ab. Jedes physikalische System soll eine durchgehende zeitliche Entwicklung haben, d. h. in allen Zeitpunkten definiert sein. Wir postulieren die Existenz von freien Systemen, die durch Geraden beschrieben werden. Sei $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4$, so nennen wir $T(t, \boldsymbol{x})$ die Menge aller Geraden durch $(t, \boldsymbol{x})$, die freie Systeme beschreiben. Diese Geraden müssen von der Form

$$\{(t+\tau, \boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tau \in \mathbf{R}\}$$

sein, und $T'(t, \boldsymbol{x})$ sei die Menge der so definierten „Geschwindigkeiten" $\boldsymbol{v}$; die Abbildung

$$T'(t, \boldsymbol{x}) \ni \boldsymbol{v} \to \{(t+\tau, \boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tau \in \mathbf{R}\} \in T(t, \boldsymbol{x})$$

ist also eine Bijektion.

Als Symmetrien bezeichnen wir bestimmte Bijektionen des $\mathbf{R}^4$. Jede Bijektion des $\mathbf{R}^4$ definiert eine Abbildung von $T(t, \boldsymbol{x})$ in eine Menge von Punktmengen im $\mathbf{R}^4$: sei $b$ die Bijektion, so definieren wir

$$b'_{(t,\boldsymbol{x})} : T(t, \boldsymbol{x}) \to b'_{(t,\boldsymbol{x})}(T(t, \boldsymbol{x})),$$

$$b'_{(t,\boldsymbol{x})}(\{(t+\tau, \boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tau \in \mathbf{R}\}) := \{b(t+\tau, \boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tau \in \mathbf{R}\}.$$

So kommen wir zu

A 1 Ist $S$ eine Symmetrie, so gilt: für alle $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4$ und alle $g \in T(t, \boldsymbol{x})$ ist $S'_{(t,\boldsymbol{x})}(g)$ eine Gerade durch $S(t, \boldsymbol{x})$, die ein freies physikalisches System beschreibt.

Also definiert dann $S'_{(t,\boldsymbol{x})}$ eine Abbildung von $T(t, \boldsymbol{x})$ in $T(S(t, \boldsymbol{x}))$; wir fordern:

A 2: Die durch eine Symmetrie $S$ definierte Abbildung von $T(t, \boldsymbol{x})$ in $T(S(t, \boldsymbol{x}))$ ist eine Bijektion.

Diese Bijektion definiert dann wiederum eine Bijektion von $T'(t, \boldsymbol{x})$ auf $T'(S(t, \boldsymbol{x}))$. Weiter fordern wir:

B 1 Die Abbildungen $(t, \boldsymbol{x}) \to (t+\mathring{a}, D\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$ sind für alle $(\mathring{a}, \boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^4$ und für alle $D \in SO(3)$ Symmetrien.

Unter Benutzung der Translation

$$(t, \boldsymbol{x}) \to (t+\mathring{a}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$$

sieht man sofort, daß dann $T'(t, \boldsymbol{x})$ nicht von $(t, \boldsymbol{x})$ abhängt, so daß wir $T'(t, \boldsymbol{x})$ durch $T$ abkürzen. $T$ soll den Nullvektor und ein von ihm verschiedenes Element enthalten. Weiter folgt aus der Invarianz unter $SO(3)$: ist $\boldsymbol{v} \in T$, so auch $D\boldsymbol{v} \in T$ für alle $D \in SO(3)$, d. h. mit $\boldsymbol{v}$ ist jede Geschwindigkeit vom gleichen Betrag physikalisch. Ist $S$ eine Sym-

Sonderdruckanforderungen an Dr. H. BRENNICH, Sektion Physik der Universität München, Theoretische Physik, *D-8000 München 13*, Schellingstraße 2—8.

[1] G. SÜSSMANN, Z. Naturforsch. **24 a**, 495 [1969].

metrie, so ist jedem $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4$ eine Bijektion $S'_{(t,\boldsymbol{x})}$ von $T(t, \boldsymbol{x})$ auf $T\big(S(t, \boldsymbol{x})\big)$ zugeordnet; die entsprechenden Bijektionen von $T$ wollen wir auch mit $S'_{(t,\boldsymbol{x})}$ bezeichnen. Ferner fordern wir:

B 2 Das Inverse einer Symmetrie ist eine Symmetrie.

B 3 Das Produkt zweier Symmetrien ist eine Symmetrie.

Ist eine Symmetrie $S$ affin, d. h. von der Gestalt $S(t, \boldsymbol{x}) = (\mathring{a}\, t + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\, t + R\boldsymbol{x}) + c$ mit $(\mathring{a}, \boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^4$, $c \in \mathbf{R}^4$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^3$ und $R$ linear, so hängt die Bijektion $S'_{(t,\boldsymbol{x})}$ von $T$ nicht von $(t, \boldsymbol{x})$ ab, und wir schreiben kurz $S'$. Es gilt:

$$S(t+\tau, \boldsymbol{x} + \tau \boldsymbol{v}) = S(t, \boldsymbol{x}) + \tau(\mathring{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} + R\boldsymbol{v})\,;$$

nach dem oben gesagten muß also für alle $\boldsymbol{v} \in T$: $\mathring{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$ gelten, und

$$S'(\boldsymbol{v}) = (\mathring{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v})^{-1}(\boldsymbol{a} + R\boldsymbol{v})\,.$$

Insbesondere muß dann für alle $\boldsymbol{v} \in T$ gelten:

$$|\mathring{a}| > |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{v}|\,.$$

Damit sind die Carroll-Transformationen [2], $(t, \boldsymbol{x}) \to (t + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, für alle $\boldsymbol{b} \neq 0$ verboten: wäre $(t, \boldsymbol{x}) \to (t + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ eine Symmetrie, so wegen B 2 auch $(t, \boldsymbol{x}) \to (t + n\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ mit $n \in \mathbf{N}$; dann können wir aber $\boldsymbol{v} \in T$ so wählen, daß $n\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = -1$ ist, was zu einem Widerspruch führt.

Die Menge aller Symmetrien sei Sym; mit den Axiomen B ist sie eine Gruppe.

C Sym wird erzeugt von den Translationen

$$(t, \boldsymbol{x}) \to (t, \boldsymbol{x}) + c, \; c \in \mathbf{R}^4\,,$$

den Drehungen $(t, \boldsymbol{x}) \to (t, D\boldsymbol{x})$, $D \in SO(3)$, und den Geschwindigkeitstransformationen $G_{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v} \in T$.

Dabei sind die Geschwindigkeitstransformationen durch folgende Eigenschaften definiert:

C 1 $G_{\boldsymbol{v}}$ ist für alle $\boldsymbol{v} \in T$ linear;

C 2 $G'_{\boldsymbol{v}}(0) = \boldsymbol{v}$;

C 3 $G_{\boldsymbol{v}}^{-1} = G_{-\boldsymbol{v}}$;

C 4 $D\, G_{\boldsymbol{v}}\, D^{-1} = G_{D\boldsymbol{v}}$ $\big(D(t, \boldsymbol{x}) := (t, D\boldsymbol{x})\big)$;

C 5 Sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ parallel, so ist $G_{\boldsymbol{v}}\, G_{\boldsymbol{v}'}$ eine Geschwindigkeitstransformation.

Da $G_{\boldsymbol{v}}$ linear ist, gilt

$$G_{\boldsymbol{v}}(t, x) = \big(\mathring{a}(\boldsymbol{v})\; t + b(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})\; t + R(\boldsymbol{v})\; \boldsymbol{x}\big)\,.$$

Aus C 2 folgt: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}) = \mathring{a}(\boldsymbol{v})\; \boldsymbol{v}$, aus C 4 folgt:

$$G_{\boldsymbol{v}}(t, x) = \big(\mathring{a}(v)\; t + b(v)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x},\; \mathring{a}(v)\, \boldsymbol{v}\, t + r(v)\, \boldsymbol{x} + c(v)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{v}\big),$$

wo $v$ der Betrag von $\boldsymbol{v}$ ist. Wegen C 3 gilt:

$$r(v)^2 = 1, \qquad b(v) = \big(\mathring{a}(v) - \mathring{a}(v)^{-1}\big)\, v^{-2}\,,$$
$$c(v) = \big(\mathring{a}(v) - r(v)\big)\, v^{-2} \qquad (v \neq 0)\,,$$

und aus C 5 folgt mit

$$(G_{\boldsymbol{v}} G_{\boldsymbol{v}'})'(\boldsymbol{0}) = G'_{\boldsymbol{v}}\big(G'_{\boldsymbol{v}'}(\boldsymbol{0})\big) = G'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}') \; : G_{\boldsymbol{v}}\, G_{\boldsymbol{v}'} = G_{G'(\boldsymbol{v}')}$$

Hiermit folgt:

$$r(v) = 1, \;\; \mathring{a}(v)\; v^2 \big(\mathring{a}(v') - \mathring{a}(v')^{-1}\big) = \mathring{a}(v')\; v'^2 \big(\mathring{a}(v) - \mathring{a}(v)^{-1}\big);$$

ist also $\mathring{a}(v)$ für irgendein $\boldsymbol{v} \in T$ verschieden von $\pm 1$, so ist $\mathring{a}(v)$ für alle $v \neq 0$ verschieden von $\pm 1$, und es folgt:

$$\mathring{a}(v) = (1 \pm v^2/c^2)^{-1/2}, \quad c \in (0, \infty)\,;$$

anderenfalls gilt $\mathring{a}(v) = 1$ für alle $\boldsymbol{v} \in T$. Durch A 1 wird $\mathring{a}(v) = (1 + v^2/c^2)^{-1/2}$ ausgeschlossen: denn einerseits folgt aus $|\mathring{a}(\boldsymbol{v})| > |\boldsymbol{v}|\,|b(\boldsymbol{v})|$: $|\boldsymbol{v}| < c$ für alle $\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{v}}\; T$; andererseits gilt dann aber

$$G'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = 2(1 - \boldsymbol{v}^2/c^2)^{-1}\, \boldsymbol{v}\,,$$

d. h. $|G'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})| > 2\,|\boldsymbol{v}|$ für alle $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, so daß $T$ nicht beschränkt sein kann, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $\mathring{a}(v) = 1$ für alle $\boldsymbol{v} \in T$ oder $\mathring{a}(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ für alle $\boldsymbol{v} \in T$. Man kann zeigen, daß im ersten Fall $T = \mathbf{R}^3$ gelten muß, im zweiten Fall $T = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3 : |\boldsymbol{v}| < c\}$. Aus

D $T$ ist beschränkt

folgt dann:

$$T = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3 : |\boldsymbol{v}| < c\}\,, \;\text{ und }\; \mathrm{Sym} = ISO(1, 3)\,,$$

d. h. alle Geschwindigkeiten unterhalb der Grenzgeschwindigkeit sind zugelassen, und die Symmetrie-Gruppe ist die inhomogene Lorentz-Gruppe.

[2] J.-M. Levy-Leblond, Ann. Inst. Henri Poincaré, **3 A**, 1 [1965].